Version vom März 1999

Lutz Führer, Frankfurt am Main

Logos und Proportion – Gestaltliche Aspekte von Bruchzahlbegriff und Bruchrechnung

(nach einem Vortrag in Köln vom 30. Juni 1998)

Bei der Bruchrechnung geht vieles in die Brüche. Wir wußten es schon aus Hart, Andelfinger, Padberg oder Streefland als im vorigen Jahr die Mittelstufenergebnisse von TIMSS herauskamen:

(TIMSS-Beispiele zur Bruchrechnung)

Bruchrechnung gilt als sehr schwer, und es gibt eine ganze Reihe von gut belegbaren Vermutungen, warum das so ist. Ich nenne nur die wichtigsten Gründe:

- „Gemeine" Brüche werden – anders als Dezimalbrüche – kaum mit „normalen" Zahlvorstellungen verbunden. Sobald z.B. *a/b* mit *a*:*b* identifiziert wird, wirken Vorurteile aus der Grundschulzeit nach: Dort galt *a*:*b* als „unausgerechnete Divisionsaufgabe". Dezimalbrüche erscheinen als die eigentlichen Ergebnisse und werden viel eher als „Zahlen" akzeptiert.
- Die ständige Kopplung von zwei oder vier natürlichen Zahlen stellt sehr hohe Anforderungen an das Übersichtsvermögen von Sechstklässlern.
- Nur für einige wenige „Alltagsbrüche" wird ein intuitives Verständnis der Größenordnung aufgebaut. Nach einigen üblicherweise sehr bemüht anschaulichen Einführungsphasen wird weitgehend „gefühllos" gerechnet.
- Vernünftige lokale Heuristiken scheitern oft: falsche Addition, Größenvergleich getrennt nach Zähler und Nenner, Ziffern- oder Summandenkürzen, gemischte Zahlen als Produkte, Kehrwert des Dividenden statt Divisors... Die verbeitetsten Fehlerquellen stammen nach Padberg (z.B. S. 145) aus unzulässigen Verallgemeinerungen von an sich vernünftigen Strukturmustern wie

$$\frac{a}{b} \circ \frac{c}{d} = \frac{a \circ c}{b \circ d} \;;\; \frac{a}{b} \circ n = n \circ \frac{a}{b} = \frac{a \circ n}{b} \;;\; \frac{a}{b} \circ \frac{c}{b} = \frac{a \circ c}{b^2} \;;$$

$$\frac{a}{b} \circ \frac{c}{b} = \frac{a \circ c}{b} \;;\; n = \frac{n}{n} = \frac{n}{0} \;;\; \frac{0}{0} = 1 \;;\; \frac{a}{0} = \frac{a}{1} \quad usw.$$

Allein die ersten beiden Muster verleiten in Tests immer wieder um 25% der Schüler zu deprimierenden Fehlern.

- Das Herumrechnen mit nicht-alltäglichen Brüchen erscheint vielen Schülern als formalistisches, absichtlich heimtückisches Ritual.
- Es kommen zwar Brüche im Alltag vor, aber keine ernsthafte Bruchrechnung.

Bruchrechnung kommt im Alltag kaum vor

Der letzte Punkt soll noch ein wenig erläutert werden, obwohl vieles dazu schon bei Freudenthal 1973/1983, Baireuther 1990/1998 und Profke 1991 steht. Es ist ja heute üblich, auf Lebensweltbezüge zu setzen, um Motivation, Intuition und Verfügbarkeit in Anwendungssituationen zu stützen (vgl. aktiver versus passiver Wortschatz). Nehmen wir z.B. ein paar Seiten aus dem derzeit schönsten Schulbuch und aus dem anspruchsvollsten der letzten Jahre:

(Schulbuchseiten: „Anwendungen der Bruchrechnung" aus Lambacher/Schweizer 6 bzw. Spektrum 6)

Auch eine Auflistung der „5 Anwendungsaspekte“ nach Postel (Padberg, S. 42) wirkt eher enttäuschend:

(1) Bruchzahlen werden zur Bezeichnung von Größen (z.B. von Längen, Flächeninhalten, Zeitspannen, Gewichten usw.) eingesetzt (*Maßzahlaspekt*).
Beispiele: $\frac{1}{2}m$, $\frac{3}{4}cm^2$, $\frac{1}{2}$ Stunde, $\frac{3}{4}$ kg
Hierfür verwenden wir im folgenden auch die Bezeichnung *konkrete Brüche*.

(2) Durch Bruchzahlen werden Beziehungen zwischen zwei Größen derselben Art (z.B. zwischen Gewichten) beschrieben (*Relationsaspekt*).
Beispiel: Fleisch besteht zu $\frac{2}{3}$ aus Wasser.

(3) Mit Hilfe von Bruchzahlen werden auf Größen anzuwendende multiplikative Rechenanweisungen angegeben (*Operatoraspekt*).
Beispiel: Nimm $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{8}l$ Sahne (bei einem Backrezept)

(4) Bruchzahlen dienen zur Bezeichnung von Stellen auf einer Skala (*Skalenwertaspekt*).
Beispiel: Wasserstand $1\frac{1}{2}m$

(5) Bruchzahlen dienen zur Angabe von Quotienten (Verhältnissen) aus natürlichen Zahlen bzw. aus Größen (*Quotientenaspekt*).
Beispiele: Maßstab, Mischungsverhältnis.

Gleich anschließend heißt es bei Padberg lapidar: „Für die Einführung der *Rechenoperationen* sind nur der Größen- und der Operatoraspekt tragfähig.“ Ich komme noch darauf zurück, möchte aber erst noch einen dritten Beleg für die Lebensferne der Bruchrechnung liefern.

Auch Streefland kritisiert in seiner vielzitierten Habilitationsschrift die arg gekünstelten Veranschaulichungen und sogenannten „Anwendungen“, die das System der Bruchrechnung nicht nahelegen, sondern nur illustrieren:

> „The structuralistic approach ignores reality as a source for the mathematics in question, with the result that material for producing a system is replaced by material for reproducing a system.“ (Streefland, S. 18)

Dem verspricht er nun mit einem „realistischen Zugang“ (realistic approach) zu begegnen, der das System über die schrittweise Mathematisierung realistischer Problemsituationen schülerzentriert erzeugt (neudidaktisch: Eigenproduktionen in adäquaten, d.h. erst konkreten, dann zunehmend abstrakteren Lernumgebungen generieren das Standardsystem unter Berücksichtigung der Treffersschen Progressiven Schematisierung im Rahmen der van Hieleschen Lernebenentheorie):

> „Instead of emphasizing the ‚insightful reproduction of the system‘, ..., one can take its historical complement: ‚the insightful construction of the system‘.“ (S. 19)

Dazu stellt er eine Reihe von Prinzipien auf:

1. „... reality should serve as a *source* for the mathematics to be produced. That is, the mathematics to which one aspires finds its origins in actual problem areas.“

2. „... starting from open problem situations having a strongly generative nature. In the learning process this means that the students, through using this material, will themselves become constructors – producers of their own mathematics... The point, in other words, is to outline

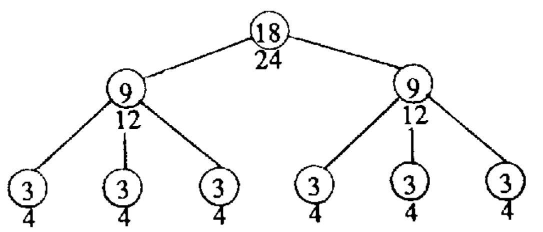
the path taken by learning by rationally reconstructing the historical learning process. This can prevent starting the learning process at too high a level of abstraction and, at the same time, can help implement a gradual progression in mathematization according to an historical example.“

3. „The learning process ... must be highly interactive.“ (Diskussion, Zusammenarbeit, gemeinsame Auswahlen unter den Eigenprodukten...)
4. „lines of learning are intertwined“ (z.B. nach Freudenthal: „Comparison and arrangement of situations can be decided beforehand with proportions. And that is exactly what they are there for.“)
5. „instruction is highly interactive“ (dabei Enaktiv-Ikonisch-Symbolisch-Aufbau gemäß Bruner berücksichtigen)

Das historische Muster einer typischen Situation, die zur Mathematisierung durch Brüche herausfordert, sieht Streefland in Verteilungsproblemen. Er zitiert wiederholt eines der ältesten, nämlich Aufgabe 5 aus dem Papyrus Rhind: „Verteile 8 Brote unter 10 Männern!“ Das kann man ja auf verschiedene Weise und auf allen drei Repräsentationsebenen machen: Erst jedem ein halbes Brot, dann jedem ¼ und schließlich noch jedem ein Zwanzigstel. (So haben Fachhistoriker die merkwürdigen Stammbruchtabellen zu erklären versucht. Leider funktioniert diese Erklärung nicht durchgängig; vgl. etwa Robins/Shute.) Man kann auch gleich jedes Brot in Zehntel teilen, oder – etwas weiter hergeholt – erst die einfachere Parallelaufgabe „4 Brote unter 5 Männer“ durch Fünfteln lösen und dann übertragen... Schreibt man die verschiedenen Lösungshandlungen – heutzutage natürlich multikulturell an Pizzas statt Broten oder Kuchen – geeignet auf, dann kommen gleich Variationen der Bruchdarstellung in den Blick, im Beispiel etwa:

$$\frac{8}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=8\cdot\frac{1}{10}=4\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}=1-\frac{1}{5}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\ldots=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\ldots$$

Das läßt sich nach Streefland noch weiter ausbauen, wenn sich 24 Kinder 18 Pizzen teilen sollen, die sofort oder schubweise nacheinander auf einem oder mehreren Tischen zu liegen kommen. Die verschiedenen Lösungen, Problemreduktionen oder Sitzordnungen können dann mit Diagrammen wie



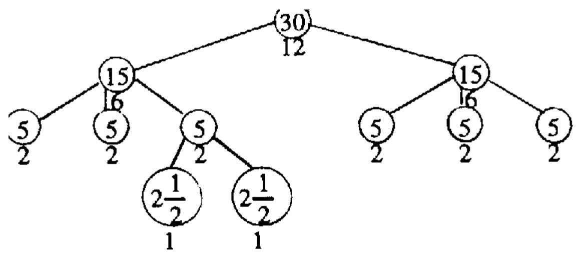


Figure 31: Each person gets $2\frac{1}{2}$

beschrieben werden. Gemeint sind „äquivalente Teilungssituationen“, also Proportionen.

Verteilungsaufgaben, so glaubt Streefland, sind die historische, alltagspraktische und epistemologische Quelle, die zur Erfindung der Brüche und Bruchrechnung herausfordert. Deswegen sei der virtuose, kreativ-schülerzentrierte Umgang mit Pizza-, Rechtecks- und Streifenteilungsaufgaben die rechte Grundlage des Bruchbegriffs. Später werden z.B. Preise für gegessene Pizzastücke herausgefunden und addiert, rechteckige Fußböden mit zu großen Fliesen ausgelegt und Verhältnisse von Verhältnissen (Brüchen) bestimmt, bevor standardisierte Schreibweisen und Regeln aus Problemsituationen herausentdeckt werden. Das alles ist im Detail sehr einfallsreich, schülernah und einfühlsam arrangiert, und auch die mitgeteilten Schüleräußerungen und Eigenproduktionen sind höchst charmant und lesenswert. (In Lehrproben und empirischen Untersuchungen sind Schüler ja bekanntlich immer enzyklopädisch kreativ.)

Gerade weil sich Streefland schülernah und einfühlsam um einen „realistic approach“ bemüht, wird erneut deutlich, daß es mit dem lebensweltlichen Bedarf an Bruchrechnung schlecht bestellt ist:

- Die Verteilung von Broten, Kuchen oder Pizzas führt auf die Division natürlicher Zahlen zurück, notfalls eben in kleineren Einheiten oder kontextangemessen approximativ. „Erst habe ich eine Dreiviertelstunde auf dich gewartet, und jetzt wieder eine halbe!“ Wer nicht weiß, daß eine halbe Stunde aus zwei Vierteln besteht, der geht auf Minuten zurück. Reale Verteilungsaufgaben zwingen nicht zur Nacherfindung von Rechenverfahren für gemeine Brüche, sie legen eher eine Ganzzahlarithmetik mit Notationen in Kommaschreibweise nahe. Davon zeugt unser Zollstock und auch die babylonische Stellenwertarithmetik, die im Gegensatz zur ägyptischen Bruchrechnung überlebte und bis etwa 1600 n. Chr. das Scientific Computing beherrschte.
- Teilungen von Geld und Gut sind in der Realität immer nur sehr beschränkt möglich und sinnvoll. Wer siebentelt schon Pizzen?
- Während die Strichrechenarten materiell handfest im Sinne von Vermehren oder Vermindern von Pizzas, Broten, Strecken, Flächen, Zeiten oder Gewichten verstanden werden können, erfordern die Punktrechenarten, sobald zwei echte Brüche verknüpft werden sollen, formale Abstraktionen oder Kontextwechsel. Vermehren und Vermindern stellen hier sogar – und dies in dramatischem Kontrast zur Grundschularithmetik – irreführende Konzepte dar.
- Die Vermischung von Verteilungsproblemen mit Proportionen ist höchst verfänglich, weil sie die beiden häufigsten Fehlerquellen begünstigt, nämlich die „falsche“ Addition bzw. die Verwechslung von Verhältnissen mit Anteilen (man lese die vorigen Abbildungen aus Streefland von unten nach oben).

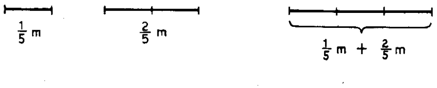
Die Beziehung zwischen Bruchrechnung und Proportionen ist keineswegs so, daß es sich um Aspekte desselben handelte oder daß sich das eine als Teilgebiet des anderen begreifen ließe, wie es zum Beispiel Tropfke in den dreißiger Jahren behauptete, als man begann, die euklidische Proportionslehre wegen notorischer Erfolglosigkeit aus den Lehrplänen und Schulbüchern zu vertreiben (vgl. Tropfke 1937, S. 3, sowie das Zitat weiter unten aus Kirsch 1987, S. 259). Mit Andelfinger glaube ich, daß die Vertreibung der Proportionen aus der Orientierungsstufe (und aus der Lehrerausbildung) ein didaktischer Fehler war, der sowohl das Verständnis der Bruchrechnung als auch das Verständnis der Proportionalität schwer belastet hat. Ich möchte deshalb im folgenden eine Lanze für die früh einsetzende, aber durchgängige Behandlung von Proportionen brechen. Um Mißverständnissen vorzubeugen: Ich plädiere *nicht* für die euklidische Proportionslehre und insbesondere *nicht* für eine ausgedehnte Proportionsarithmetik, wie sie früher gern im Umfeld der Strahlensätze betrieben wurde. Und ich möchte auch die Bruchrechnung nicht abschaffen oder auf Dezimalbruchrechnung beschränken, wie es Baireuther 1990/1998 und Profke 1991 andenken. Wenn ich mich im folgenden hauptsächlich mit Proportionen befasse, dann geschieht das, weil die Probleme der Bruchrechnung jedem didaktisch Interessierten hinreichend geläufig sind. Was mir vorschwebt ist, daß möglichst alle Schüler und möglichst von Anfang an lernen, a/b und $a{:}b$ kontextabhängig als Proportionen oder als rationale Zahlen oder als dezimale Divisionsaufgabe zu verstehen, mit denen eigene, wenn auch teilweise überlappende Grundvorstellungen mit erheblicher Reichweite verbunden sind. „Der“ Bruchbegriff ist heterogen und äußerst kontextsensibel!

Größen drücken Verhältnisse aus

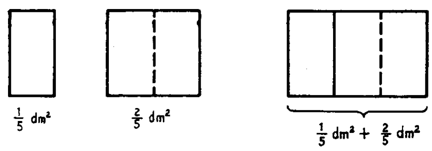
Soweit ich die einschlägige Literatur kenne, sind sich alle Spezialisten für Bruchrechenprobleme einig, daß die Schülerschwierigkeiten weniger auf Unkenntnis oder mangelhaftem Verständnis der Algorithmen beruhen, sondern auf Schwierigkeiten im (intuitiven) Bruchverständnis selbst (vgl.

z.B. Hasemann/Mangel 1999 und die dort angegebene Literatur). Insbesondere die chamäleonhafte Wandelbarkeit, die sich im bedarfsweisen Erweitern und Kürzen zeigt, und die merkwürdigen Regeln für die Strichrechenarten bleiben manchen Schülern schleierhaft, oder sie werden es, wenn nach der anschaulichen Einführung nur lange genug kontextfrei geübt wird.

Die *Grundvorstellung* der Addition von Größen ist den Schülern intuitiv klar. So läßt sich die „Addition" von 2 Längen, etwa von $\frac{1}{5}$ m und $\frac{2}{5}$ m, auf der Repräsentantenebene leicht konkret realisieren. Die Schüler legen 2 Strecken oder Stäbe entsprechender Länge aneinander. Die Gesamtlänge der beiden Stäbe liefert uns die gesuchte „Summe":



Entsprechendes gilt beispielsweise auch für die „Addition" von 2 Volumina – etwa $\frac{1}{5}l$ und $\frac{2}{5}l$ –, wenn man diese Volumina durch entsprechende Flüssigkeitsmengen veranschaulicht, die man dann zusammenschüttet oder auch für die „Addition" von Flächeninhalten, etwa von $\frac{1}{5}dm^2$ und $\frac{2}{5}dm^2$, wenn man Repräsentanten dieser Flächeninhalte zusammenfaßt, wie es die folgende Zeichnung verdeutlicht:



Im Unterricht wird man sich bei der Einführung der Addition von Größen wegen der leichteren Veranschaulichungsmöglichkeiten stark auf die Größenbereiche der Längen und Flächeninhalte stützen, und andere Größenbereiche nur in einzelnen Aufgaben „einblenden", um einseitige Fixierungen auf *einen* Größenbereich zu vermeiden.

Padberg, S. 81 f.

Den Übergang von den konkreten Brüchen zu den Bruchzahlen kann man – wie wir hier noch zum Abschluß dieses Abschnittes herausheben wollen – ***auch*** unter dem Blickwinkel beschreiben, daß hier de facto von den bekannten Größeneinheiten wie Meter, Zentimeter, Kilogramm usw. abstrahiert wird, da sie sich bei den betrachteten Rechnungen, aber auch bei der Ordnung nach der Größe und bei der Darstellung am Zahlenstrahl als – in einem gewissen Sinne – überflüssig erweisen. Man geht also bei dieser Betrachtungsweise faktisch über zu einer einzigen festen Größeneinheit, die man „das Ganze" oder „die Einheit schlechthin" oder „die natürliche Einheit" nennt. Diese Einheit führt man allerdings i.a. weder sprachlich noch schriftlich auf. Höchstens bei der Einführung der Bruchzahlen erläutert man, daß etwa $\frac{2}{3}$ bedeutet „$\frac{2}{3}$ von 1" und daß das Bezugsganze die Einheit schlechthin ist (vgl. Oehl (1974)). Allerdings bleiben – wie Kirsch (1975) zu Recht aufzeigt – die Vorstellungen von dem, was das Ganze bzw. die Einheit schlechthin ist, zwangsläufig recht vage.

Padberg, S. 64

Hier zeigt sich ein altes didaktisches Dilemma: Im Rahmen des Äquivalenzklassenaufbaus oder des Gleichungskonzepts läßt sich die volle Körperstruktur des rationalen Zahlbereichs zwar konstruieren und verifizieren, aber nicht als sinnvoll motivieren, schon gar nicht auf dem Abstraktionsniveau von Sechstklässlern. Ihr natürliches Bedürfnis nach handfest gegenständlicher Bedeutung *aller* Gegenstände und Operationen macht den Rückgriff auf Größenbeziehungen unvermeidlich, obwohl diese Größenbeziehungen durchweg schwächer strukturiert sind als der angestrebte Zahlbereich. So hapert es beim sog. „Größenkonzept" einschließlich des „quasikardinalen" Zugangs bekanntlich mit der Deutung der Punktrechenarten, während sich das sog. „Operatorkonzept" („von"-Ansatz) gegenüber der Anordnung und gegenüber den Strichrechenarten sperrt. Kummer gewöhnte Praktiker greifen denn auch abwechselnd zu beiden Konzepten, um auf Kosten aller Methodenreinheit einmal die Strichrechenarten, ein andermal die Punktrechenarten möglichst unkompliziert und anschaulich plausibel einzuführen.

Nun ist Methodenreinheit sicher kein Fetisch, dem man unbedingt nachlaufen sollte. Hinter der begrenzten Reichweite beider größenbezogenen Konzepte verbirgt sich aber m.Es. eine tiefere Schwierigkeit mit dem anschaulichen Größenbegriff selbst. Abgesehen von der pragmatischen Faustregel „Maßzahl mal Maßeinheit", scheint es in der Didaktik bis heute alles andere als klar zu sein, was den „Größenbegriff an sich" intuitiv und/oder technisch charaktersieren soll.

Im Kontext der Bruchrechnung hat es sich eingebürgert, den Größenbegriff auf „divisible Bürgerliche oder Elementare Größenbereiche" zu stützen, denen sich Größen wie Länge, Flächeninhalt, Volumen, Zeit(spannen), Gewichte oder Temperatur(differenzen) unterordnen lassen. Das „Größenkonzept“ operiert dann *in* solchen divisiblen Größenbereichen, das „Operatorkonzept“ *auf* solchen Bereichen, und der sog. „von“-Ansatz vermischt beides ein wenig, um der noch zu abstrakten Verkettung von Abbildungen aus dem Wege zu gehen. Beim (leider) sog. „quasikardinalen“ Zugang werden einfach Stammbrüche nach ägyptischer Manier wie Maßeinheiten behandelt, was den (sonst besonders fehlerträchtigen) linear-ordnungsmäßigen Umgang mit gleichnamigen Brüchen herausstellt und als geradezu selbstverständlich erscheinen läßt, die Punktrechenarten aber problematisiert.

> Nehmen wir einen typischen Kurs in Bruchrechnung, wie er sich in der Schulpraxis als recht zeitsparend und fehlerpräventiv bewährt hat: Faßt man Brüche a/b „quasikardinal“ als Größenwerte mit Maßzahl „a“ und Maßeinheit „Betel“ auf, so lassen sich bekanntlich Größenvergleiche, Addition und Subtraktion zunächst *für gleichnamige* Brüche problemlos einführen. Um diese Operationen auf ungleichnamige Brüche auszudehnen, wird über zulässige Gestaltwandel im Sinne „wertgleicher (Teilungs-) Verhältnisse von Maßeinheiten“ nachgedacht. Dies liefert eine erste Interpretation des Kalküls und zusätzlich die Möglichkeit, die Division gleichnamiger und -dimensionierter Brüche als Verhältnisbildung einzuführen. Für ungleichnamige Brüche muß zunächst noch ein Gestaltwandel eingeschoben werden, der sich aber bald als überflüssig erweist: Das Produkt mit dem Kehrwert wird als Rechenvorteil entdeckt. Die Bruchmultiplikation taucht schließlich als Umkehrung der Division auf und kann im Sinne des Operatoraspektes („von“-Konzept) sinnvoll interpretiert werden.

Ich möchte im folgenden die Vermutung belegen, daß schon der Begriff des „divisiblen Größenbereichs“ zu eng ist und deshalb Schwierigkeiten verdeckt, die bei jeder anschaulichen Grundlegung der Bruchrechnung im Kontext des Größenbegriffs aufgeklärt werden müßten.

Arnold Kirsch, der sich mit solchen Größenbereichen sehr gründlich auseinandergesetzt hat, schreibt dazu:

> „Zu Größen gelangt man, ausgehend von realen Gegenständen, durch einen Abstraktionsvorgang. Man geht dazu über, ‘gleichwertige’ Gegenstände ... nicht mehr zu unterscheiden, und spricht dann nur noch von ‘Größen’ der betreffenden Art (Längen, Gewichten, Volumina usw.). Der Abstraktionsvorgang wird oft als Meßvorgang realisiert. Das Ergebnis der Messung ist dann eine Größe, geschrieben als Maßzahl und Maßeinheit; man sagt dafür auch ‘benannte Zahl’. Eine Größe ist jedoch nicht genau dasselbe wie eine benannte Zahl: 5/8 *m* und 62,5 *cm* sind zwei verschiedene benannte Zahlen, aber Namen für dieselbe Größe.“ (Kirsch 1987, S. 52)

Man sollte erwarten, daß nun Meßvorgänge thematisiert und funktional beschrieben werden, stattdessen wird nach strukturalistischer Tradition versucht, den Größenbegriff als innermathematische Angelegenheit abzuhandeln, indem divisible Größenbereiche als angeordnete kommutative Halbgruppen mit gewissen Lösbarkeitsbedingungen charakterisiert werden, genauer: als Tripel aus einer Menge $\boldsymbol{G}$, einer assoziativen und kommutativen Addition + und einer linearen Anordnung < (Trichotomie!), wobei Gleichungen $A+X = B$ genau für $A<B$ und $nX = A$ für beliebige $n \in \mathbf{N}$ in $\boldsymbol{G}$ lösbar sind. Als Größen werden dann Elemente eines Größenbereichs bezeichnet. Daß hier bewußt eine erhebliche Begriffseinschränkung vorgenommen wird, kann man zwar im Vorwort von Kirsch 1970 explizit lesen, es wird aber in neueren Lehrbüchern, z.B. im Padberg, gern unterschlagen. Neben den ausgeblendeten Meßproblemen und -beschränkungen fallen dabei noch ein paar Aspekte unter den Tisch, die alltäglichen Größenbegriffen anhaften und insofern möglicherweise das Verständnis auf Schülerseite belasten:

- „Größe“ ist a priori mit Anordnungsvorstellungen verbunden, nicht notwendig mit Additivität (z.B. Skalenaspekt bei Höhen-, Temperatur- oder Zeitablesungen).
- Mitunter kann eine sinnvolle Addition definiert werden, die entweder gekünstelt wirkt (Zeitspannen, Temperaturdifferenzen, Wichten, Lichtstärken, Oberflächenspannungen) oder die Lösbarkeitsbedingung verletzt („falsche“ Addition bei Durchschnittsgeschwindigkeiten, Mittelwerten oder Vektorgrößen; s.u.).
- Die Trichotomieforderung („entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$“) ist sehr scharf und erfordert oft unnatürliche Äquivalenzklassenbildungen. Beispiele: Durchschnittsgeschwindigkeiten

oder Mittelwerte werden üblicherweise größenmäßig wie Brüche verglichen. In diesen Kontexten sind aber 2/4 und 4/8 weder kleiner noch gleich noch größer, und es ist auch keineswegs sinnvoll, zu den Bruch-Äquivalenzklassen überzugehen. Vektorgrößen lassen sich oft nur partiell ordnen, wenn Verträglichkeit mit der Addition verlangt wird.

- Die allgegenwärtige Größe „Geld" liefert keinen divisiblen Größenbereich, bei **N**/100 oder **N**/10 000 (Dollarkurse) endet die praktische Bedeutung. Genau betrachtet verlangt die universelle Lösbarkeitsbedingung bei fast jeder realen Größe eine Idealisierung, man denke nur an Praktikabilität (Pizzen!), an reale Meßmöglichkeiten oder an die atomare Struktur unser Welt.
- Um die Abhängigkeit von spezifischen Maßeinheiten loszuwerden, muß man überdies entweder im nachhinein isomorphe Größenbereiche identifizieren oder Größen von vornherein als Äquivalenzklassen gewisser „Repräsentanten" auffassen. Beides ist kaum ohne Verrenkungen möglich: „Die gemeinsame Eigenschaft aller (kongruenten) Strecken einer Klasse nennen wir ihre Länge. Jede Strecke einer Klasse wird ein Repräsentant dieser Länge genannt." (Padberg, S. 149f.) Was ist dann mit „Länge: 5 *m*" gemeint? Zunächst denkt man an ein Meßergebnis, einen Meßwert, der ein gewisses Verhältnis zwischen gemessener und Einheitslänge feststellt. Wie und wo welches Meßgerät angelegt wurde, spielt für die Längenangabe keine Rolle. Ob es sich um Strecken, Abstände oder Skalenablesungen handelt, wird ignoriert. Soll man sich zu 5 *m* erst noch eine Strecke vorstellen, deren Äquivalenzklasse [5 *m*] als Menge kongruenter Strecken die gemeinte Länge ist? Soll dann etwa ein 5 *m* langer Holzstab grober Repräsentant eines präzisen Repräsentanten der Länge sein?

Es gibt also durchaus sinnvolle praktische Verwendungen des Größenbegriffs, die nicht in das Korsett der sog. „Elementaren Größenbereiche" passen. Mit anderen als den von mir erwähnten Gründen hat das kürzlich auch Heinz Griesel festgestellt. Mit Bezug auf ältere Vorlagen (vgl. etwa Eulers Algebra) schlägt Griesel folgende Definition für den Terminus „Größe" vor:

> „Unter einer Größe g mit der Trägermenge T (= Objektbereich; L.F.) und der Wertmenge W (Meßwerte; L.F.) versteht man eine (? L.F.) Funktion $g : T \rightarrow W$, so daß gilt:
>
> (1) Die Funktion (Größe) g ist surjektiv...
>
> (2) In dem Wertebereich W ist eine Verknüpfung $/ : W \times W \rightarrow \boldsymbol{R}^*$, $(x,y) \rightarrow x/y$ eingeführt, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:
>
> (2a) $(x/y) \cdot (y/z) = x/z$ (für alle x,y,z aus W)
>
> (2b) $x/y = 1 \;\Rightarrow\; x = y$ (für alle x,y aus W)."
>
> (Griesel 1997, S. 265)

Griesel stellt, hauptsächlich unter Verweis auf (endliche) Wahrscheinlichkeitsbegriffe, fest, daß Größenbereich, (physikalisches) Größensystem und Größe (als Funktion) sehr verschiedene Dinge sind. Auf die Frage, ob Schülern bewußt gemacht werden sollte, daß „Größen Funktionen sind mit einer Trägermenge als Funktionsbereich", antwortet er unter Hinweis auf die angesprochene Klassenstufe 6 mit einem klaren Nein (S. 280). Ich stimme dem völlig zu. Schülern der Mittelstufe sollte es völlig ausreichen, Größen im folgenden Sinne zu verstehen:

> „Erstlich wird alles dasjenige eine *Größe* genannt, was einer Vermehrung oder einer Verminderung fähig ist oder wozu sich noch etwas hinzusetzen oder wovon sich etwas hinwegnehmen läßt... Es läßt sich aber eine Größe nicht anders bestimmen oder ausmessen als daß man eine andere Größe derselben Art als bekannt annimmt und das Verhältnis angibt, in dem diese zu jener steht."
>
> (L. Euler: Vollständige Anleitung zur Algebra, Kap. 1.1 und 1.3.)

Größe, (physikal. Größe) Bez. für einen Begriff, der eine quantitative Aussage über ein meßbares Einzelmerkmal eines physikal. Sachverhalts, eines physikal. Objektes oder eines physikal. Phänomens beinhaltet; physikal. G. bezeichnen also Eigenschaften oder Merkmale, die sich quantitativ erfassen lassen. Jede G. ist durch eine geeignete Meßvorschrift definiert. Die Messung einer physikal. G. besteht in einem Vergleich der G. mit dem als Einheit gewählten bzw. festgelegten ↑Normal. Somit läßt sich jede G. durch das Produkt aus Zahlenwert und Einheit darstellen. Die G.angabe 5 Meter (5 m) bedeutet also: 5 · 1 Meter (5 · 1 m).

Aus: Meyers großes
Taschenlexikon, 1983

Mir geht es hier vornehmlich um intuive Komponenten von Größen-, Bruchzahl- und Verhältnisbegriff bei Schülern. Diese Aspekte werden bei Griesel nur ganz am Rande berücksichtigt. Es erübrigt sich deshalb an dieser Stelle, auf diverse Bedenken und Vorbehalte gegen Griesels „neue" Größendefinition einzugehen. Wie er möchte ich von einer begrifflichen Überfrachtung des Schulunterrichts abraten. Nach der klassischen These Wolfgang Ratichs „Lehre nie, was hernach vergessen werden muß!" sollte man weder bei Schülern noch bei Primar- oder Mittelstufenlehrern den Eindruck erwecken, Verhältnisse und Brüche seien dasselbe und hingen semantisch von einem expliziten Größenbegriff ab, und dieser wiederum von Elementaren Größenbereichen.

Ich denke, das in Lehramtsvorlesungen verbreitete Mengenkonzept für den allgemeinen Größenbegriff verwirrt mehr als es klärt, weil es das Operieren mit Äquivalenzklassen von Meßwerten in einem kurzatmigen unterrichtsmethodischen Interesse in den Vordergrund rückt und dabei von der (halb-)arithmetischen Struktur des Gegenstandsbereichs ablenkt. Dort aber entscheiden sich die eigentlichen Fragen nach Gültigkeit und Angemessenheit irgendwelcher Rechnereien – jedenfalls nach übereinstimmender Auffassung von Nichtmahematikern, seien es nun Schüler, Lehrer oder Anwender in den Wissenschaften. (Diese Einwände würde ich grundsätzlich auch gegenüber Griesels Neuvorschlag erheben.)

Halten wir – in teilweiser Übereinstimmung mit Griesel – für die Schule fest: 5 *m* ist das Ergebnis eines Meß- oder Zählvorgangs, der ein gegebenes oder gedachtes Objekt *relativ* auf das Standardmaß 1 *m* bezieht. Wenn man so will, stellt jedes Meßverfahren eine Funktion mit (un-) gewissem Anwendungs-= Definitionsbereich dar, die Größenwerte liefert. Solche Meßwerte sind ihrer Natur nach Verhältnisangaben. Sie bestehen aus einer Zahl und einer (Maß-) Einheit, die angibt, mit welchem Standardmaß verglichen wird und welche Meßverfahren in betracht kommen. Daß man statt 5 *m* auch 500 *cm* sagen kann, ist nur eine sprachliche Vereinbarung. Sie drückt dasselbe Meßergebnis nach einer festen Übersetzungsregel anders aus, z.B. 100 *cm* := 1 *m*. Verhalten sich nun die Gegenstände eines gewissen Anwendungsbereichs in gewisser Hinsicht additiv und divisibel, dann ist es vernünftig, vom Meßverfahren Homomorphie zu erwarten und aus den für rationale oder reelle Meßwerte oder Meßwerttupel verfügbaren Arithmetiken hypothetische Rückschlüsse auf den jeweiligen Gegenstandsbereich abzuleiten.

Leider wird die Beziehung zwischen Gegenstandsbereich, euklidischer Geometrie und rationalem oder reellem Wertevorrat weder im alten Mengenkonzept Kirschs, noch im „neuen" Funktionskonzept Griesels hinreichend geklärt. Ich möchte deshalb wenigstens andeuten, daß die Geometrie nicht originär zum Größenkonzept gehört, sondern lediglich bei gewissen Größen eine Katalysatorrolle spielt: Zu euklidischen Geometrien gehören bekanntlich gewisse Metriken, Vergleichs- und Meßverfahrensregeln sowie mithilfe des Kongruenzbegriffs abgeleitete Maße für Strecken, Flächen, Volumina usw., d.h. für *ideelle* Objektbereiche und Meßverfahren, die Sechstklässlern nicht unbedingt „anschaulich" sind. Im ideellen Kontext von Strecken macht die Aussage „Strecke der Länge 5 *m*" erst Sinn, wenn die hinzugedachte euklidische Geometrie an die Modellierung eines physischen Gegenstandsbereichs gebunden wird. Es ist also zumindest verwirrend, wenn der Größenbegriff losgelöst von Meß- und Maßproblemen an Strecken oder anderen Abstrakta illustriert wird. Ob Kirsch oder Griesel – Größen als innermathematische Angelegenheit zu behandeln ist nur formalistisch zu rechtfertigen, weil es Erkenntnismöglichkeiten der Wirklichkeit im Namen irgendwelcher idealistischen, in Wahrheit aber zeitgebundenen Stringenzvorstellungen ausblendet und folglich beschneidet. Daß weder Additon (Kirsch) noch Multiplikation bzw. Proportionalität (Griesel) a priori zum Größenbegriff gerechnet werden sollten, belegt auch die folgende Tabelle:

PHYSIKALISCHE GRÖSSEN UND IHRE EINHEITEN IM INTERNATIONALEN EINHEITENSYSTEM (SI)

Größe (Formelzeichen)	SI-Einheit Name (Einheitenzeichen)	Zusammenhang mit anderen SI-Einheiten
Aktivität (A)	Becquerel (Bq)	$1\ Bq = 1\ s^{-1}$
Arbeit (W)	Joule (J)	$1\ J = 1\ N m = 1\ W s = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Belichtung (H_V)	Luxsekunde (lx s)	$1\ lx\ s = 1\ m^{-2} \cdot s \cdot cd \cdot sr$
Beleuchtungsstärke (E_V)	Lux (lx)	$1\ lx = 1\ lm \cdot m^{-2} = 1\ cd \cdot sr \cdot m^{-2}$
Beschleunigung (a)	Meter durch Sekundenquadrat (m/s^2)	
Dichte (ρ)	Kilogramm durch Kubikmeter (kg/m^3)	
Drehimpuls; Impulsmoment; Drall (L)	Kilogramm mal Quadratmeter durch Sekunde ($kg \cdot m^2/s$)	
Drehmoment; Kraftmoment (M)	Newtonmeter (N m)	$1\ N m = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Druck (p)	Pascal (Pa)	$1\ Pa = 1\ N \cdot m^{-2} = 1\ m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Energie (W)	Joule (J)	$1\ J = 1\ N m = 1\ W s = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Energiedosis; Äquivalentdosis (D)	Gray (Gy)	$1\ Gy = 1\ J \cdot kg^{-1} = 1\ m^2 \cdot s^{-2}$
Energiedosisrate, -leistung; Äquivalentdosisrate, -leistung ($\dot{D}$)	Gray durch Sekunde (Gy/s)	$1\ Gy \cdot s^{-1} = 1\ m^2 \cdot s^{-3}$
Feldstärke, elektr. (E)	Volt durch Meter (V/m)	$1\ V \cdot m^{-1} = 1\ m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Feldstärke, magnet. (H)	Ampere durch Meter (A/m)	
Fläche (A)	Quadratmeter (m^2)	
Flußdichte, elektr.; Verschiebungsdichte (D)	Coulomb durch Quadratmeter (C/m^2)	$1\ C \cdot m^{-2} = 1\ m^{-2} \cdot s \cdot A$
Flußdichte, magnet.; Induktion (B)	Tesla (T)	$1\ T = 1\ V s \cdot m^{-2} = 1\ kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Fluß, magnet.; Induktionsfluß (Φ)	Weber (Wb)	$1\ Wb = 1\ V s = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Frequenz (f, ν)	Hertz (Hz)	$1\ Hz = 1\ s^{-1}$
Geschwindigkeit (v)	Meter durch Sekunde (m/s)	
Gewichtskraft (G)	Newton (N)	$1\ N = 1\ m \cdot kg \cdot s^{-2}$
Impuls; Bewegungsgröße (p)	Newtonsekunde (N s)	$1\ N s = 1\ m \cdot kg \cdot s^{-1}$
Induktivität (L)	Henry (H)	$1\ H = 1\ V s \cdot A^{-1} = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Ionendosis (J)	Coulomb durch Kilogramm (C/kg)	$1\ C \cdot kg^{-1} = 1\ A s \cdot kg^{-1}$
Ionendosisrate, -leistung (j)	Ampere durch Kilogramm (A/kg)	
Kapazität, elektr. (C)	Farad (F)	$1\ F = 1\ C \cdot V^{-1} = 1\ A s \cdot V^{-1} = 1\ m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Kraft (F)	Newton (N)	$1\ N = 1\ m \cdot kg \cdot s^{-2}$
Kraftmoment; Drehmoment (M)	Newtonmeter (N m)	$1\ N m = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Kreisfrequenz (ω)	reziproke Sekunde (s^{-1})	
Ladung, elektr. (Q)	Coulomb (C)	$1\ C = 1\ A s$
* Länge (l)	Meter (m)	
Leistung (P)	Watt (W)	$1\ W = 1\ J \cdot s^{-1} = 1\ N m \cdot s^{-1} = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Leitfähigkeit, elektr. (γ, σ, κ)	Siemens durch Meter (S/m)	$1\ S \cdot m^{-1} = 1\ A \cdot V^{-1} \cdot m^{-1} = 1\ m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
Leitwert, elektr. (G)	Siemens (S)	$1\ S = 1\ A \cdot V^{-1} = 1\ m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
* Lichtstärke (I_V)	Candela (cd)	
Leuchtdichte (L_V)	Candela durch Quadratmeter (cd/m^2)	
Lichtmenge (Q_V)	Lumensekunde (lm s)	$1\ lm s = 1\ s \cdot cd \cdot sr$
Lichtstrom (Φ_V)	Lumen (lm)	$1\ lm = 1\ cd \cdot sr$
* Masse (m)	Kilogramm (kg)	
Oberflächenspannung (σ, γ)	Joule durch Quadratmeter (J/m^2)	$1\ J \cdot m^{-2} = 1\ N \cdot m^{-1} = 1\ kg \cdot s^{-2}$
Permeabilität (μ)	Henry durch Meter (H/m)	$1\ H \cdot m^{-1} = 1\ m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Schallintensität (J)	Watt durch Quadratmeter (W/m^2)	$1\ W \cdot m^{-2} = 1\ kg \cdot s^{-3}$
Spannung, elektr.; Potentialdifferenz, elektr. (U)	Volt (V)	$1\ V = 1\ W \cdot A^{-1} = 1\ J \cdot s^{-1} \cdot A^{-1} = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
* Stoffmenge (n)	Mol (mol)	
* Stromstärke, elektrische (I)	Ampere (A)	
* Temperatur, thermodynam. (T, Θ)	Kelvin (K)	
Trägheitsmoment (J)	Kilogramm mal Quadratmeter ($kg \cdot m^2$)	
Viskosität, dynam. (η)	Pascalsekunde ($Pa \cdot s$)	
Viskosität, kinemat. (ν)	Quadratmeter durch Sekunde (m^2/s)	
Volumen (V)	Kubikmeter (m^3)	
Wärmekapazität (C); Entropie (S)	Joule durch Kelvin (J/K)	$1\ J \cdot K^{-1} = 1\ W s \cdot K^{-1} = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
Wärmekapazität, spezif. (c)	Joule durch Kilogramm und Kelvin ($J/(kg \cdot K)$)	$1\ J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1} = 1\ m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
Wärmeleitfähigkeit (λ)	Watt durch Meter und Kelvin ($W/(m \cdot K)$)	$1\ W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1} = 1\ m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot K^{-1}$
Wärmemenge (Q)	Joule (J)	$1\ J = 1\ N m = 1\ W s = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Wärmestrom (Φ)	Watt (W)	$1\ W = 1\ J \cdot s^{-1} = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Wichte (γ)	Newton durch Kubikmeter (N/m^3)	$1\ N \cdot m^{-3} = 1\ m^{-2} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Widerstand, elektr. (R)	Ohm (Ω)	$1\ \Omega = 1\ V \cdot A^{-1} = 1\ m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Winkel, ebener ($\alpha, \beta, \gamma, \ldots$)	Radiant (rad)	
Winkel, räuml. (Ω)	Steradiant (sr)	
Winkelbeschleunigung (α)	Radiant durch Sekundenquadrat (rad/s^2)	
Winkelgeschwindigkeit (ω)	Radiant durch Sekunde (rad/s)	
* Zeit (t)	Sekunde (s)	

* Basisgrößen des Internationalen Einheitensystems (SI).

Aus: Meyers großes Taschenlexikon, Ausg. 1983

Auch Kirsch scheint eine epistemologische Diskrepanz zwischen intuitivem Größenverständnis und rein innermathematischen Definitionsversuchen bemerkt zu haben, wenn auch etwas widerwillig:

> „Unter einer Proportion oder Verhältnisgleichheit versteht man eine Aussage(form) der folgenden Form:
>
> *a* verhält sich zu *b* wie *c* zu *d*;
>
> *a* und *b* stehen im gleichen Verhältnis wie *c* zu *d*.
>
> Dabei sind *a* und *b* zwei gleichartige Größen (etwa Längen), ebenso *c* und *d* (etwa Flächeninhalte). Diese alte, aber durchaus noch gebräuchliche Ausdrucksweise sieht man heute als gleichbedeutend mit der folgenden an:
>
> $a : b = c : d$ bzw. $a/b = c/d$.
>
> Hier ist das Verhältnis $a{:}b$ nichts anderes als der Quotient a/b der Größen *a* und *b*, worunter man einfach eine geeignete (positive, reelle) Zahl versteht; entsprechend für $c{:}d$. Somit sind die Ausdrücke Proportion und Verhältnis heute entbehrlich, und demgemäß findet man sie kaum noch in modernen Darstellungen der Mathematik.
>
> Es ist nun bemerkenswert, daß der Begriff des Verhältnisses begriffsgeschichtlich dem der (reellen bzw. rationalen) Zahl vorausgeht und insofern geeignet ist, zu einer Antwort auf unsere Frage (‘Was ist eine Zahl?’) beizutragen. Und zwar haben schon die Griechen ohne Benutzung von anderen als natürlichen Zahlen eine präzise Definition der Verhältnisgleichheit gegeben. In heutiger Ausdrucksweise handelt es sich dabei um eine Relation zwischen Größenpaaren...“ (Kirsch 1987, S. 259)

Kirsch skizziert dann die Eudoxische Definition der Verhältnisgleichheit nach dem 5. Buch von Euklids Elementen und bewundert gebührend, daß sie auch für irrationale Größenverhältnisse paßt.

Eudoxos’ Definition der Verhältnisgleichheit

(Euklid V, Def. 5; vgl. Schreiber, S. 16f.)

Gleichartige kommensurable Größen *a*, *b*:

$$a{:}b \text{ wie } m{:}n \;:\Leftrightarrow\; \exists e : a = m\cdot e \wedge b = n\cdot e$$

Paarweise gleichartige Größen *a*, *b* bzw. *c*, *d*:

$$a{:}b \text{ wie } c{:}d \;:\Leftrightarrow\; \forall\, m, n : (m\cdot a \,\kappa\, n\cdot b \;\Leftrightarrow\; m\cdot c \,\kappa\, n\cdot d)\quad,$$

wobei κ beidemal kleiner, gleich oder größer bedeutet.

(Vervielfachungen liefern dieselben Größenverhältnisse,

im divisiblen Fall: $\forall\, m, n : \frac{a}{n}\,\kappa\,\frac{b}{m} \Leftrightarrow \frac{c}{n}\,\kappa\,\frac{d}{m}$.)

Geht man zur Bruchschreibweise und -anordnung über, dann bedeutet die Gleichheit nach Eudoxos, daß *a*/*b* und *c*/*d* die gleichen rationalen Näherungswerte (*ne*)/(*me*) bzw. (*nE*)/(*mE*) für irgendwelche „Einheiten“ *e bzw.* E haben.

Ich kann hier nicht näher auf die höchst delikate Proportionslehre in den Büchern 5 bis 9 der Elemente eingehen, möchte aber festhalten, daß in der Tat manches dafür spricht, den heutigen Zahlbegriff genetisch auf Größenverhältnisse zu stützen, daß es aber nur in formalistischer Sicht halbwegs zu rechtfertigen ist, Relationen zwischen Größen mit rationalen Zahlen zu identifizieren.

Nimmt man Mathematik nicht als geistreiches Glasperlenspiel, sondern als auf Erkenntnis physischer oder geistiger Realitäten gerichtetes Bemühen, dann macht es einen großen Unterschied, ob man von 9 *m* : 3 *m* (Größenverhältnis) redet oder von 9/3 = 3 (Größenwert, Maßzahl, Meßergebnis). Ersteres spielt sich in einem Größenbereich ab, letzteres in einem anderen, nämlich in dem sachfremden Zahlgrößenbereich **Q**. Durch das Kürzen der Einheiten *m* geht zu rasch Realitätsbezug verloren, und durch die Verabredung, 9/3 mit 3 zu identifizieren, auch noch jede Gestaltinformation. Ich bin überzeugt, daß Kirsch sehr nahe bei Euklid ist, wenn er am Schluß des Zitats von einer Relation zwischen Größen*paaren* spricht. Leider entfernt er sich anschließend gleich wieder mit Riesenschritten von diesem Gedanken, wenn er ihn mit dem modernen Zahlbegriff, insbesondere mit Irrationalzahlen, in einen Topf wirft. Von Euklid bis Newton wurden geometrische Untersuchungen in der Gedankenwelt von Proportionen durchgeführt, nicht weil die moderne Bruchrechnung fehlte (man kannte dafür ja die babylonische und ägyptische), sondern weil man wirkliche *Verhältnisse* im wahrsten Sinne des Wortes beschreiben und studieren wollte, nicht innermathematische. So hat es wohl auch Euklid gesehen und deshalb die jüngere Eudoxische Größenlehre in Buch 5 vor die ältere pythagoreische Zahlentheorie der Bücher 7-9 gestellt.

Ich möchte es so ausdrücken: Brüche sind sehr spezielle Verhältnisse, nämlich solche, die gegenüber Erweitern und Kürzen invariante Strichrechnungen erlauben, weil sie *Teile relativ zu ein und demselben/denselben Ganzen* bezeichnen. Der Verhältnis- oder Proportionsbegriff setzt diese Relativierung nicht voraus, Proportionen beschreiben – anders als Brüche – auch *innere Teilungen* im Sinne eines qualitativen Gestaltmerkmals. Im Kontext von Proportionen sind drei Operationsformen natürlich, die Verkettung (Operatormultiplikation), die Verhältnisbildung (Division) und die „falsche“ Addition (vgl. Euklid VII.12-14). Eine Subtraktion ist möglich, aber meist bedeutungslos. Deshalb ist es sachlich irreführend, die Regeln der Bruchrechnung auf beliebige Proportionen anzuwenden. Diese Feststellung ist didaktisch brisant, weil Proportionen im Gegensatz zum Rechenzahlbegriff von Brüchen lebensweltliche Bedeutung haben, auf die sich die Intution von Nichtmathematikern immer wieder stützen muß. Die Identifikation des Proportionsbegriffs mit dem auf Bruch*rechnung* hin ausgelegten Bruch(rechenzahl)begriff ist irreführend.

Die Bruch*rechnung* ist eine innermathematische Angelegenheit, deren *Bedeutung als Propädeutik der Algebra* (vgl. dazu Freudenthal 1973/1983) im Sinne einer demokratischen Breitenbildung nicht unterschätzt werden sollte. Die Brucharithmetik dient (wie auch die nagativen Rechenzahlen) dazu, Gleichungen und Terme zu einem flexiblen, universellen Ausdrucksmittel für Zusammenhänge, Strukturen und Gestaltmerkmale zu machen und von verwirrenden Fallunterscheidungen zu entlasten. Für Zwölfjährige sind das keine überzeugenden Motive, sie bedürfen einer gereifteren Perspektive, um einen Kalkül für Abstraktionen recht würdigen zu können. Ob Bruchrechnung (möglichst) alle Zwölfjährigen gelehrt werden soll, kann deshalb nicht aus deren aktualen Bedürfnissen und Perspektiven heraus entschieden werden. Es ist kein Motivationsproblem, sondern ein Problem der curricularen Zielsetzung, und in diesem Rahmen spricht viel dafür, den bescheidenen Abstraktionsgrad der Bruchrechnung dann zuzumuten, wenn es das Eintreten in die formal-operationale Entwicklungsphase erstmals zuläßt: Der kalkülmäßige Umgang mit Abstraktionen bedarf nämlich erheblicher Gewöhnung, ohne die alle Optionen auf Teilhabe an der technisch-naturwissenschaftlich-mathematisch durchdrungenen Arbeits-, Medien- und Wirtschaftswelt stark beschnitten würden. Der *lebensweltliche* Bezug des Bruchbegriffs, der Zwölfjährigen viel zugänglicher ist, steckt jedoch nicht in seinem Bezug zur Algebra, sondern in seinem *Verhältnisaspekt*, und dieser hat substanziell andere Konnotationen innerhalb und außerhalb der Mathematik.

Verhältnisse (Proportionen) sind natürlicher

Vergessen wir also vorübergehend die ganze Bruchrechnung, und konzentrieren wir uns ein wenig auf die Idee, gestaltliche Verhältnisse mit Zahlenpaaren zu beschreiben. Wo drängt sich das auf?

<u>Ein Text für Schüler:</u>

Beim Messen oder Rechnen bekommt man einzelne Zahlen heraus, z.B. 2 *m* oder 3. Manche denken so: Steht das Ergebnis fest, dann kann man die Aufgabe vergessen und hat den Kopf frei für alles weitere. Nur das richtige Ergebnis zählt. Warum sollten wir sonst messen und rechnen?

Nun, wir messen oder rechnen, weil wir etwas über Zusammenhänge herausbekommen wollen. Wer die Zusammenhänge nicht kennt oder vergessen hat, kann mit den 2 *m* oder mit der Drei gar nichts anfangen. Einzelne Zahlenwerte sagen nichts über Zusammenhänge. Mit Zahlenpaaren ist es schon etwas anderes: Bei 2 : 3 oder bei 2 *m* in 3 *h* oder bei (2;3) oder bei $\frac{2}{3}$ kann man sich eher etwas denken, vielleicht ein Fußballspiel, eine Schnecke, einen Punkt im Quadratgitter und ein großes Stück von einem Irgendwas. Zahlenpaare beschreiben Zusammenhänge. Sie tun das viel besser als zwei einzelne Zahlen, weil sie eine Verbindung zwischen den beiden anzeigen. Die Zwei und die Drei werden im Verhältnis zueinander gesehen. Mathematische Verhältnisse beschreibt man mit Zahlenpaaren, die mit Verbindungszeichen wie „ : “ , „ / “, „ (... ; ...) “ oder einem „Bruchstrich“ zusammengehalten werden. Der Doppelpunkt wird bei Verhältnissen nicht als „geteilt durch“, sondern wie beim Fußballergebnis mit „zu“ gelesen und bedeutet keine Auffordung zum Dividieren. (Er soll nur ans Dividieren erinnern. Wer Bruchrechnung kann, wird den Grund leicht einsehen.)

Schuhinstitut Offenbach FR 22.4.96

Kinderfüße werden immer länger und schmaler

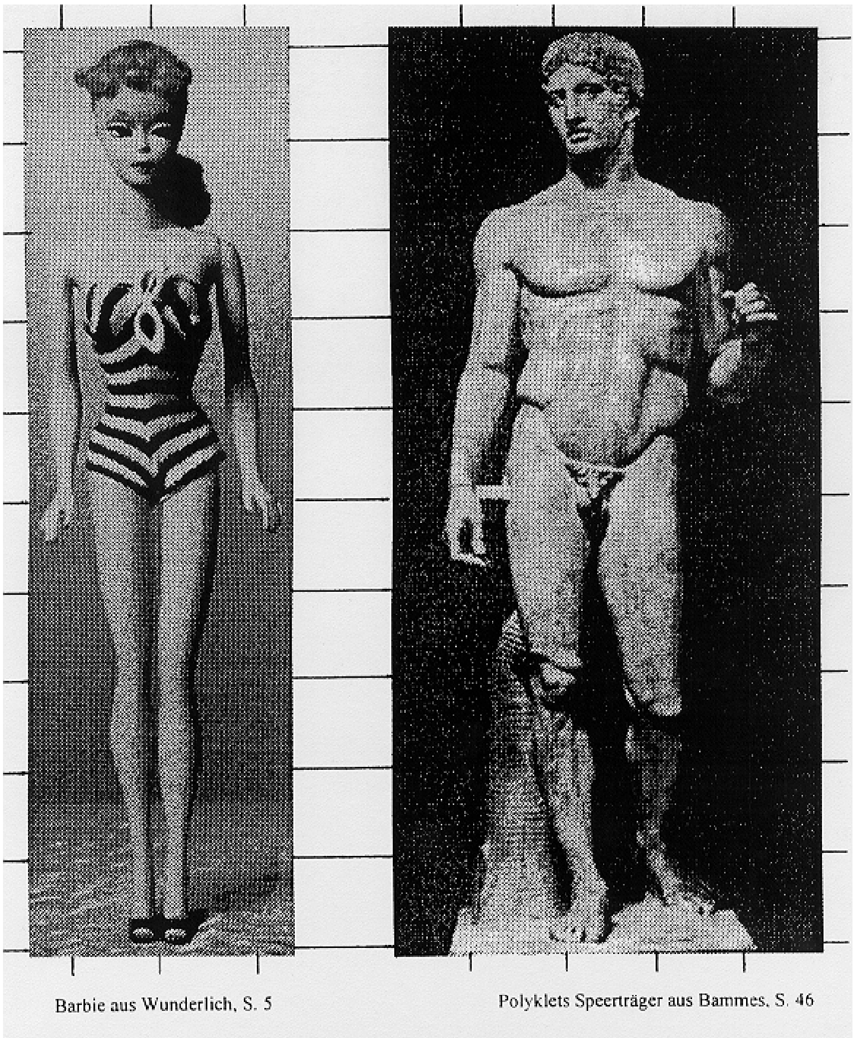
Innerhalb der letzten 30 Jahre sind die Füße der Kinder bis zu einem halben Zentimeter in die Länge gewachsen. Das hat das Schuhinstitut in Offenbach ermittelt. Mädchen legten mit ihren Fußmaßen auffallend mehr zu als Jungen, erläuterte der Orthopäde Thomas Wessinghage aus Mettlach in Frankfurt. Der Grund sei die Vorpubertät der Mädchen, die sie im Vergleich zu 1960 früher durchlebten. Das Institut, Sprachrohr von Produzenten und Handel der Schuhbranche, stützt sich auf Untersuchungen an 3100 Kindern im Alter zwischen drei und 14 Jahren.

Der Trend zum großen Fuß geht mit einer Entwicklung zu schmalen Maßen einher. In der Breite haben die kindlichen Füße seit 1960 bis zu 2,3 Millimeter „abgenommen“. Die Tendenz zu „lang und schmal“ entspricht Beobachtungen einer allgemeinen Verschlankung des Menschen, sagte der Mediziner.

Fußschäden führen die Experten vor allem auf nicht passende Kinderschuhe zurück, die häufig schon bei Babys im Alter von einem Jahr zu kurz bemessen seien. „Dies schadet den Füßen, Fußschäden entwickeln sich bald, ohne daß es die Kinder und ihre Eltern zunächst merken“, stellte der Geschäftsführer des Schuhinstituts, Philipp F. Urban fest. Die Schuhbranche hat vor Jahren gemeinsam mit Fachärzten das Weiten-Maß-System (WMS) entwickelt, das normierte Kinderschuhe in drei Weiten festschreibt und damit genau passende Fußbekleidung für Heranwachsende garantiert. lhe

aus: Frankfurter Rundschau, 22.04.’96

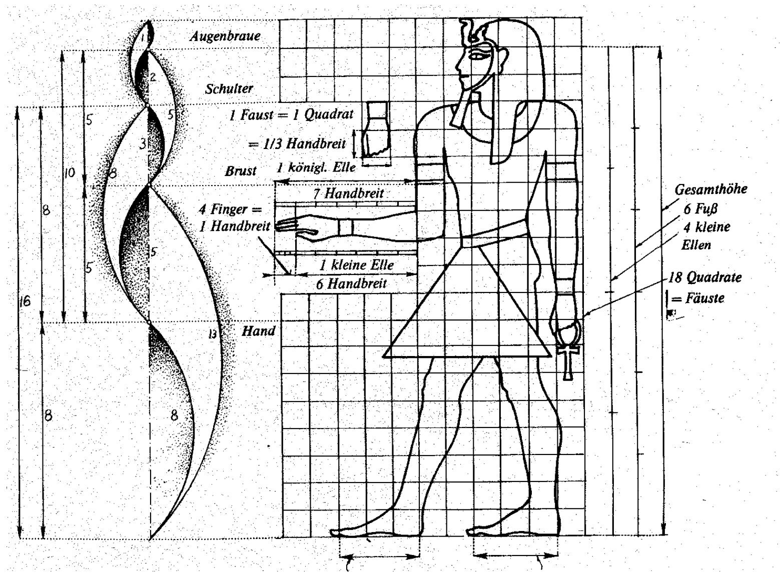
Zahlen- und Größenverhältnisse, verbundene Zahlenpaare, kommen viel öfter vor als die meisten meinen. Darauf wollen wir im folgenden aufmerksam machen, und wir wollen auch herausfinden, wann zwei Verhältnisse ungefähr gleich sind. Das ist gar nicht einfach, aber aus zwei Gründen wichtig: Zahlenverhältnisse verwirren nur, wenn wir sie nicht richtig einschätzen können. Und: Obwohl jeder ein Gefühl für Größenverhältnisse hat, tun sich viele beim Vergleich von Verhältnissen schwer und wundern sich später, warum ihnen die Bruchrechnung immer „in die Brüche“ geht. Dort wird nämlich mit Verhältnissen herumgerechnet.



Was unterscheidet den Körperbau? (Versuch's mit feineren Rastern!)

Polyklet war nach der griechischen Überlieferung der erste, der einen Proportionskanon für den menschlichen Körper aufgestellt hat. Uns ist das von Vitruv überliefert, der wiederum in der Renaissance eifrig studiert wurde, z.B. von Brunelleschi, da Vinci, Caesariano, di Giorgio und Dürer. Zu Euklids Zeiten hieß Verhältnis „logos", und Verhältnisgleichheit „analogia". Dem ersten haftete damals eine ganz geläufige Doppelbedeutung im Sinne von Verhältnis und Vernunft an, was in der älteren lateinischen Übersetzung „ratio" gut zum Ausdruck kam. Der Analogie haften heute Konnotationen wie ähnlich, gleichlaufend, sinngemäß gleichartig u.ä. an. Aus diesem Wort wurde dann das lateinische Wort Proportion (im Sinne von Proportionsgleichung), das wiederum im kollektiven Bewußtsein mit Ebenmaß, Wohlgestalt, Regelmaß, Angemessenheit, Wohlabgestimmtheit u.ä. assoziiert ist. Man denke nur an Wörter wie „wohlproportioniert", „überproportional" oder „Proporz". All das verweist eher auf ästhetisch-moralische Kategorien denn auf Probleme der Güterverteilung. Ganz zu schweigen von den zahllosen Konnotationen des Wortes „Verhältnis" in unser Umgangssprache.

Die griechische Überlieferung war freilich nicht ganz frei von Nationalismen:



Es gibt einige unfertige ägyptische Wandmalereien, bei denen das zugrundeliegende Raster zur proportionsgerechten Übertragung des Entwurfs noch zu sehen ist. Man kann sich auch kaum vorstellen, daß größere Monumente – noch dazu bei Serienfertigung – ohne Rasterübertragung in Stein gehauen werden konnten. Daß die ägyptische Königselle recht genau 52,4 *cm* lang war, entnahm man natürlich Proportionsrechnungen an überlieferten Großbauten. Papyrus Rhind, Aufg. 56-59, handeln vom Rücksprung (seqed; babyl.: sa-gal = weg essen), um den die Seiten der Cheops-Pyramide zurückspringen, wenn man jeweils eine Elle aufsteigt (Cotangens)... Thales wird nachgesagt, er habe den Pharao überrascht, als er aus der Schattenlänge eines Stabes eine Pyramidenhöhe herausfand. Die antiken Längen- und Breitenbestimmungen beruhten durchweg auf Gnomonverhältnissen. Nach Nikomachus war die Proportionenlehre unentbehrlich für alle Naturwissenschaften, für die Musik(theorie), die Sphärik (=Erd- und Himmelskunde) und für die Kurventheorie. Bis in Eulers Zeit wurden mechanische und analytische Untersuchungen grundsätzlich in Proportionsform gedacht. Z.B. bestand lange Unklarheit über die Bedeutung von Zähler und Nenner im Differentialquotienten, demgegenüber verstand Newton Ableitungen (Fluxionen) sehr anschaulich im Sinne von $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t) : (\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)$.

Ich nenne jetzt noch einige Beispiele in ungeordneter Reihenfolge, in denen heute noch Verhältnisangaben üblich sind:

1. Spielergebnisse, z.B. Tor- oder Satzergebnisse
2. Formatangaben, z.B. bei DIN-Rechtecken
3. Chancen, z.B. bei der SKL
4. Maßstäbe, z.B. Landkarten, techn. Zeichnungen, ..., Gulliver
5. Blattstellungen (Fibonacci-Folge)
6. Leistungen, z.B. Klassenarbeits- oder Geschwindigkeitsvergleiche
7. Benzinverbrauch
8. Lohn- und Preiserhöhungen
9. gerechte Teilungen, z.B. bei Unterhaltsprozessen
10. Zahnradübersetzungen
11. Steigungen am Berg
12. Indexzahlen, z.B. pro-Kopf-Einkommen

13. Mischungsverhältnisse, z.B. Kochrezepte oder Gewichtung von Punkten beim Abitur
14. Gebrauchsformen, z.B. Typographie
15. Quotientengrößen, z.B. Geschwindigkeiten, Wachstum, Lebenserwartung, Ware-Preis-Relation
16. relative Häufigkeit/Wahrscheinlichkeit, z.B. Pi-Bestimmung nach der Mte.-Carlo-Methode
17. klassische Musiktheorie
18. Dreisatz
19. Falsche Ansätze (Regula falsi, Taylor-Formel, Algebraische Analysis)
20. Ähnlichkeit
21. Strahlensätze
22. Steigung von Geraden
23. trigonometrische Verhältnisse (vgl. Herbart)
24. Differenzenquotienten (vgl. Kettenregel in Leibnizscher Schreibweise)
25. Teilverhältnistreue als char. Eigenschaft liearer Abbildungen, z.B. in der Darstellenden Geometrie
26. in Redewendungen wie „Verhältnismäßigkeit der Mittel“ (vgl. Rousseau, Contrat Social, 3.1)
27. bei relativierten Aussagen, z.B. Komparativen

Diese Liste läßt sich zweifellos noch beträchtlich verlängern, z.B. so:

(Folie: TIMSS – Klasse mit 28 Schülern

& Malle-Aufgabe: „Auf 6 Studenten kommt 1 Professor...“)

Es sollte aber schon deutlich geworden sein, daß Verhältnisangaben erheblich öfter gebraucht werden als die Grundrechenarten mit Brüchen. Das Entscheidende ist in den meisten Fällen die Formangabe durch ein Zahlenpaar, nicht das Ausdividieren, Multiplizieren oder Addieren. Zur Formangabe gehört dafür die mehr oder weniger scharfe Einschätzung, ob zwei Verhältnisse gleich oder näherungsweise gleich sind. Die Frage, wann letzteres der Fall ist, kann auf dem Niveau von Klasse 6 außerordentlich spannend sein – man gehe nur einmal die obigen Beispiele dazu durch. Mathematischer wird das ganze, wenn man auf folgende Aktivitäten überleitet:

(fast-Freihandzeichnen, Streckenmodell, Rechtecksmodell, $\frac{a \pm 1}{b \pm 1} \approx \frac{a}{b}$)

Die „falsche“ Addition

4.4.2 Typische Fehler und mögliche Ursachen

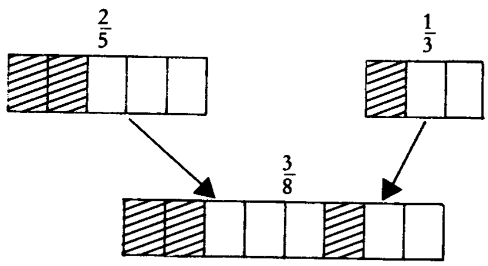
4.4.2.1 Bruchzahl plus Bruchzahl

Die Fehler massieren sich hier weit überwiegend auf *ein* Fehlermuster, nämlich auf das Muster A 1: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

......

Als *Ursachen* für dieses Fehlermuster A 1 kommen folgende Faktoren in Frage:

- *Unscharfe, anschauliche Bruchvorstellungen*, wie das folgende Diagramm belegt (vgl. auch Peck/Jencks (1981)): (Vgl. die folgende Seite oben.)



- Verwechslung bzw. Vermischung der Addition von Brüchen mit der im täglichen Leben häufiger vorkommenden *Addition von Verhältnissen* (vgl. Borasi/Michaelsen (1986)):

  Hans hat zunächst 3 von 5, danach 2 von 4 Spielen gewonnen. Er hat insgesamt $5(= 3 + 2)$ von $9(= 5 + 4)$ Spielen gewonnen.
- Übertragung der vom schriftlichen Addieren bei den natürlichen Zahlen vertrauten Strategie *Verknüpfe Gleichartiges* (dort Einer plus Einer, Zehner plus Zehner usw.) auf das Addieren von Brüchen (hier Zähler plus Zähler, Nenner plus Nenner bzw. Addition der Zahlen oben und getrennte Addition der Zahlen unten) und Gewinnung so eines formal korrekt aussehenden Ergebnisses (vgl. Daubert/Gerster (1983)).
- Mängel im *Bruchzahlverständnis:* Der Bruch benennt für diese Schüler nicht *eine* Zahl, sondern besteht aus *zwei* voneinander *unabhängigen natürlichen* Zahlen, die entsprechend getrennt addiert werden. Die Tendenz hierzu könnte bei Benutzung des *Operator*konzepts verstärkt werden, da dort die Bruchoperatoren in weitgehend selbständige Komponenten (Multiplikations–, Divisionsoperatoren) zerlegt werden.
- Übertragung des rechnerisch sehr leichten und einprägsamen *Multiplikationsrahmens* (oder -frame; vgl. Goffmann (1974)) auf die Addition, wobei dieser fehlerhafte Transfer bei einem Beginn der Bruchrechnung mit der Multiplikation besonders naheliegt.

Aus: Padberg, S. 91f.

Wir haben schon weiter oben bemerkt, daß für manche Quotientengrößen die „falsche" Addition ⊕, d.h. die zeilenweise, nicht nur naheliegend, sondern angemessen ist. Das ist z.B. bei Mittelwerten oder Durchschnittsgeschwindigkeiten so, und grundsätzlich bei fast allen vektoriellen Größen. Dort ist – anders als bei den Elementaren Größenbereichen – i.allg. keine lineare Anordnung sinnvoll oder strukturverträglich möglich, man denke z.B. an komplexe Zahlen oder Größen oder an die folgende korrekte ⊕-Addition von Durchschnittsgeschwindigkeiten bzw. Mittelwerten:

$$\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{1} = \frac{2}{3}.$$

Nimmt man zur Veranschaulichung von Verhältnissen innen geteilte Strecken, dann ist die ⊕-Addition ganz natürlich. Bei Rechtecksdarstellungen wirkt sie freilich gekünstelt, wenn nicht zufällig zwei entsprechend liegende Seiten gleich sind (oder gleich gemacht werden).

(Folie: Strecken- und Flächenaddition)

Beliebte Argumente gegen die „falsche" Addition sind, daß in

$$\frac{m \cdot a}{m \cdot b} \oplus \frac{n \cdot c}{n \cdot d} = \frac{e}{f}$$

das Ergebnis e/f massiv von m und n abhängt und zwischen den Summanden liegt statt rechts davon. Das zweite Argument der Monotonieverletzung gibt man freilich schon bei der Multiplikation notgedrungen auf, und das erste Argument überzeugt auch nur, solange man bei a:b an a/b und nicht an Paare (a;b) denkt. Tatsächlich wurde die Mittelwerteigenschaft gern herangezogen, um Zwischenwerte für zwei Brüche oder Verhältnisse zu erzeugen („Chuqet-Mittel"), bevor die Dezimalzahlen nach 1600 mit den Logarithmentafeln in Gebauch kamen.

Beispiel: Um 500 n.Chr. wurde in China und im 16. Jahrundert in Holland der zauberhafte Näherungswert 11 3\3 55 für π entdeckt, dessen Auftauchen unter den Kettenbruchnäherungen erst später erkannt wurde. Man nimmt an, daß der chinesische Entdecker ähnlich wie der holländische vorgegangen ist: falsche Addition zwecks Mittelwertbildung aus gewissen Darstellungen der archimedischen Werte, z.B. $3\,\frac{1}{7} = 3\,\frac{6}{42} = \frac{132}{42}$ und $3\,\frac{10}{71} = \frac{223}{71}$.

Das folgende Ergebnis rechnet man leicht nach: Durch geeignete Wahlen von m und n lassen sich *alle* Brüche zwischen a/b und c/d erzeugen (vgl. auch Hischer 1998). Wer das, wie ich, überraschend findet, kommt vielleicht darauf, daß (a;b)+(c;d) die Diagonale im Vektorparallelogramm darstellt und daß das Erweitern und Kürzen dort nichts anderes bedeutet als ein „Herumrutschen" auf den jeweiligen Ursprungsgeraden, bevor addiert wird. Die zu den verschiedenen Additionsergebnissen (e;f) gehörigen Äquivalenzklassen (=Ursprungsgeraden) füllen den Doppelkegel zwischen L(a;b) und L(c;d) (in der rationalen Ebene) aus! Hier bewährt sich die vektorielle Darstellung der Verhältnisse $a : b$, $c : d$ und $e : f$.

Stellt man „alle" Brüche in einem Zähler-Nenner-Koordinatensystem geordnet dar, so sind das Ausstreichen von „überflüssigen", weil wertgleichen Brüchen, das Aufsuchen von Ursprungsgeraden ohne Schnitt mit den „Bruchpunkten" (Irrationalzahlen! vgl. Freudenthal 1973) oder auch das Studium von „Quadratbrüchen" äußerst lehrreich...

Es zeigt sich, daß Verhältnisse – anders als Brüche – starke Verbindungen zu Steigungen und proportionalen Funktionen haben und daß ihr Begriffskern eher in der Gestalterhaltung modulo Vergröberungen und Verfeinerungen liegt als in der algebraisch flexiblen Verfügbarkeit. Die (Fast-) Gleichheit von Verhältnissen ist der tiefere und praxisnähere Begriff. Verhältnisse sind mitnichten dasselbe wie Brüche!

Schaut man sich die oben genannten Beispiele für die alltägliche oder mathematische Verwendung von Verhältnissen darauf hin an, ob eine Addition und ggfs. welche Addition jeweils sinnvoll ist, dann erscheint die „falsche“ Addition oft als natürlicher als die Bruchaddition. Die Bruchrechnung rekurriert in der Tat massiv auf Teilungen von ein und demselben Ganzen (bzw. ein und denselben mehreren Ganzen), das mit Maßeinheiten noch angedeutet, bei den rationalen Zahlen aber bewußt unterschlagen wird. Das provoziert viele der erwähnten Fehlleistungen (vgl. das obige Zitat aus Padberg, S. 64). Vermutlich könnte man dem wesentlich besser beikommen, wenn man Brüche als besondere Proportionen einführte. Daß Logos, Ratio, Verhältnis und Proportion immer noch im kollektiven Bewußtsein verankert sind, hat einen tiefen Sinn. Im Alltag und in Anwendungssituationen sind jedenfalls gefühlssichere Vergleiche von Proportionen allemal wichtiger als der Körper der rationalen Zahlen. Trotzdem sollte weiter versucht werden, alle Zwölfjährigen mit der Bruchrechnung vertraut zu machen, weil sie als Propädeutik der Algebra im vertrauten Zahlgewand Teilhabe an der mathematischen Kultur in Wirtschaftsleben und Wissenschaft allen zugänglich machen soll. Bruchrechnung *und* Verhätnisaspekt gehören nebeneinander, nicht durcheinander in die „Orientierungsstufe“ (5./6. Schuljahr), weil sie orientieren und (rechtzeitig) grundlegen. Es handelt sich um wesensverschiedene Aspekte, die im Bruchbegriff zwar gemeinsam verkörpert, aber mitnichten verschmolzen sind. Dies herauszuarbeiten würde zwei Jahre Mathematikunterricht wohl rechtfertigen.

Literatur:

Andelfinger, Bernhard: Didaktischer Informationsdienst Mathematik – Thema: Proportion. Neuss: Landesdienst für Curriculumentwicklung, Lehrerfortbildung und Weiterbildung 1981.

Baireuther, Peter: Konkreter Mathematikunterricht. Bad Salzdetfurth: Franzbecker 1990.

Baireuther, Peter: Zur Kontinuität von Lernprozessen im Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1998, S. 102-105.

Beaton, A.E.; Mullis, I.V.S. u.a.: IEA’s Third International Mathematics and Science Study (TIMSS). Chestnut Hill, MA: Boston College Nov. 1996.

Benoit, Paul; Chemia, Karine; Ritter, Jim (Hrsg.): Histoire de fractions – fractions d’histoire. Basel u.a.: Birkhäuser 1992.

Bühler, Walther: Das Pentagramm und der Goldene Schnitt als Schöpfungsprinzip. Stuttgart: Freies Geistesleben 1996.

Doczi, György: Die Kraft der Grenzen – Harmonische Proportionen in Natur, Kunst und Architektur. München: Dianus-Trikont 1984.

Euklid: Die Elemente (Übersetzung C. Thaer). Darmstadt: Wiss. Buchges. 1980.

Euler, Leonhard: Vollständige Anleitung zur Algebra. Petersburg 1767 (russ.), 1770 (dt.). (Hier zitiert nach der dt. Reclam-Ausgabe, Stuttgart 1959.)

Freudenthal, Hans: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1. Stuttgart: Klett 1973.

Freudenthal, Hans: Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht u.a.: Kluwer 1983.

Griesel, Heinz: Zur didaktisch orientierten Sachanalyse des Begriffs Größe. In: JMD 18.4 (1997), S. 259-284.

Hart, Kathleen M.: Childrens Understanding of Mathematics 11-16. London: John Murray 1981.

Hasemann, Klaus; Mangel, Hans-Peter: Individuelle Denkprozesse von Schülerinnen und Schülern bei der Einführung der Bruchrechnung im 6. Schuljahr. Erscheint in: JMD 20 (1999).

Hischer, Horst: „Fundamentale Ideen“ und „Historische Verankerung“ – dargestellt am Beispiel der Mittelwertbildung. In: Mathematica didactica 21.1 (1998), S. 3-20.

Kirsch, Arnold: Elementare Zahlen- und Größenbereiche. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht 1970.

Kirsch, Arnold: Mathematik wirklich verstehen. Köln: Aulis 1987.

Malle, Günter: Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 1993.

Padberg, Friedhelm: Didaktik der Bruchrechnung. Heidelberg u.a.: Spektrum (2. Aufl.) 1995.

Profke, Lothar: Bruchrechnung im Mathematikunterricht. In: Mathematik lehren und lernen – Festschrift für Heinz Griesel. Hannover: Schroedel 1991, S. 143-155.

Robins, Gay; Shute, Charles: The Rhind Mathematical Papyrus. New York: Dover 1987.

Rousseau, Jean-Jacques: Vom Gesellschaftsvertrag oder Grundsätze des Staatsrechts. Stuttgart: Reclam 1996.

Schmid, August; Weidig, Ingo (Hrsg.): Lambacher/Schweizer, Band 6, Ausg. Hessen. Stuttgart u.a.: Klett 1995.

Schreiber, Peter: Euklid. Leipzig: Teubner 1987.

Speiser, Andreas: Klassische Stücke der Mathematik. Zürich: Orell Füssli 1925.

Streefland, Leen: Fractions in Realistic Mathematics Education. Dordrecht u.a.: Kluwer 1991.

Szabó, Arpad: Die Entfaltung der griechischen Mathematik. Mannheim: BI 1994.

Tischel, Gerhard (Hrsg.): Spektrum der Mathematik, Band 6 und Lehrerband 6. Frankfurt am Main: Diesterweg 1986.

Tropfke, Johannes: Geschichte der Elementar-Mathematik, III. Band – Proportionen und Gleichungen. Berlin/Leipzig: de Gruyter (3. Aufl.:) 1937.

Tropfke, Johannes: Geschichte der Elementarmathematik, Band 1 – Arithmetik und Algebra. Berlin/New York: de Gruyter (4. Aufl.:) 1980.

Adresse des Autors:

Prof. Dr. Lutz Führer
Institut für Didaktik der Mathematik
der J. W. Goethe-Universität
D-60054 Frankfurt am Main
e-mai: fuehrer@math.uni-frankfurt.de